PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^{s} gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

37 Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt und $S = \mathbb{R}[x]_{(x-a)}$ die Lokalisierung des Polynomrings $\mathbb{R}[x]$ in einer Variablen im maximalen Ideal $(x - a)$.

(a) Beschreibe die Elemente von S als differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$, die auf einer Umgebung von a in $\mathbb{R}$ definiert sind.

(b) Zeige, dass man keine gemeinsame Umgebung für alle Funktionen in S finden kann.

38 (a) Betrachte für ein nicht-konstantes Polynom $f \in K[x]$ die Menge $S = K[x]_f$ der Quotienten h/f^m, für $h \in K[x]$ und $m \in \mathbb{N}$. Zeige, dass S in natürlicher Weise wieder Ring ist.

(b) Vergleiche für $f, g \in K[x]$ die Ringe $K[x]_f$, $K[x]_g$ und $K[x]_{fg}$.

(c) Zeige, dass die Mengen $U_f = \{a \in K^n,\ f(a) \neq 0\}$ die Basis einer Topologie auf K^n bilden, der sogenannten Zariski-Topologie.

(d) Beschreibe die abgeschlossenen Mengen dieser Topologie. Ist sie hausdorff'sch?

39^s Es sei p ein Primideal in R und $R_p = (R \setminus p)^{-1}R$ die Lokalisierung von R in p.

(a) Zeige, dass R_p lokaler Ring ist, d.h., genau ein maximales Ideal besitzt, nämlich $p \cdot R_p$.

(b)* Ist R Integritätsbereich, so auch R_p?

(c) Interpretiere die Elemente von R_p für $R = \mathbb{R}[x, y]$ und $p = (x, y)$ als rationale Funktionen auf $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^2$, die in 0 definiert sind.

(d) Bette $\mathbb{R}[x, y]_{(x,y)}$ in den Ring $\mathbb{R}\langle x, y\rangle$ der algebraischen Potenzreihen ein, bzw. in den Ring $\mathbb{R}\{x, y\}$ der konvergenten Potenzreihen.

40 Sei R kommutativer Ring mit 1. Zeige:

(a) Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(R)$ ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \in R^*$.

(b) Der Ring $\mathrm{M}_n(R)$ hat keine nicht-trivialen zweiseitigen Ideale.

41 Es sei $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ Ideal und $X = V_{\mathbb{C}}(I)$ die Verschwindungsmenge von I in $\mathbb{C}^n$.

(a) Definiere durch Einschränkung auf X das Konzept einer polynomialen Funktion $f : X \to \mathbb{C}$.

(b) Zeige, dass die polynomialen Funktionen auf X einen Ring $\mathbb{C}[X]$ bilden, der isomorph zu $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ ist.

Hinweis: Der Ring $\mathbb{C}[X]$ heisst der Koordinatenring der komplexen algebraischen Varietät X.

42* Der Übergang zum Quotientenring ist ein exakter Funktor: Es sei R Ring mit Ideal $I \subset R$, und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.

(a) Zeige, dass $S^{-1}R$, $S^{-1}I$ und $S^{-1}(R/I)$ in natürlicher Weise definiert werden können, und dass $S^{-1}I$ ein Ideal in $S^{-1}R$ ist.

(b) Zeige, dass $(S^{-1}R)/(S^{-1}I)$ isomorph zu $S^{-1}(R/I)$ ist.

(c) Drücke diese Eigenschaft durch exakte Folgen aus.